



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

XI. osztály –H1 – Szakközép kategória

## 1. feladat (20 pont)

Adott az  $A(x) = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ x^2 & x^2 + 2x & 2x + 1 \\ x & 2x + 1 & x + 2 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  egy valós szám.

Jelölje  $D(x)$  az  $A(x)$  mátrix determinánsát.

- Igazold, hogy  $D(-1) = 8$ .
- Határozd meg a  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  mátrixot, ha teljesíti az  $A(-1) \cdot B = A(1)$  összefüggést!
- Bizonyítsd be, hogy  $D(x) = x^3 \cdot (x - 1)^3$  bármely  $x$  valós szám esetén!

## 2. feladat (20 pont)

- Határozd meg az  $m$  valós paraméter azon értékeit, amelyekre az  $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$  mátrix invertálható bármely  $x$  valós szám esetén!
- Adott a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  mátrix. Számítsd ki a  $B^n$  mátrixot, ahol  $n$  egy nullától különböző természetes szám!

## 3. feladat (20 pont)

Adott az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + ax + a}, a \in \mathbb{R}$  függvény.

- Ha  $a = 0$ , határozd meg az  $f$  függvény maximális értelmezési tartományát és számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$  határértéket!
- Ha  $a = 0$ , igazold, hogy az  $f$  függvény grafikus képéhez az  $x = -1$  abszcisszájú pontjában húzott érintő merőleges az  $x + 3y - 6 = 0$  egyenletű egyenesre!
- Határozd meg az  $a \in \mathbb{R}$  paraméter azon értékeit, amelyekre az  $f$  függvény grafikus képéhez pontosan egy függőleges aszimptota húzható!

## 4. feladat (30 pont)

A Füge-fürdő gyógyparkjában található Nagy Fehér csúszda a legmagasabb Romániában.

A  $H(x)$  azt a magasságot jelöli, amelyen a látogató található, miután a csúszda kezdőpontjától  $x$  méter távolságot tett meg, és a következőképpen van meghatározva:

$$H(x) = \begin{cases} ax^2 - \frac{1}{4}x + b, & x \in [0, 2] \\ \frac{32}{\pi} \arctg \frac{1}{x-2}, & x \in (2, 40] \end{cases}, \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R}.$$

A csúszdán nincsenek „ugratók”, vagyis a  $H$  függvény folytonos a teljes  $[0, 40]$  értelmezési tartományon.

- Határozd meg a pozitív valós  $b$  számot, ha tudjuk, hogy induláskor a látogató a talajszinthez képest 18 m magasságban van!
- Az előzőleg kapott  $b$  érték felhasználásával határozd meg az  $a$  valós paraméter értékét!

### Megjegyzés:

Munkaidő: 3 óra; minden feladat kötelező; hivatalból 10 pont jár.

A maximális pontszám 100 pont.